الاقترانات المتشعّبة Piecewise Functions

الدرس الأول — الوحدة الأولى: الاقترانات والمقادير الجبرية
الصف الحادي عشر (التوجيهي) / المسار الأكاديمي

فكرة الدرس

التعرّف على الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة، وإعادة تعريفهما، وتمثيلهما بيانيًا، وتحديد مجال كلٍّ منهما ومداه.

أولاً: الأمثلة المحلولة (خطوة بخطوة)

قبل حلّ أسئلة الدرس، نوضّح كلّ نوع من المهارات المطلوبة بمثالٍ محلولٍ خطوة بخطوة، ثم نطبّقها على أسئلة الكتاب.

مثال (1): إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة

أعِد تعريف الاقتران

$$f(x) = |2x - 6|$$

بدون رمز القيمة المطلقة.

الخطوة 1: نُساوي المقدار داخل القيمة المطلقة بالصفر ونحلّه لإيجاد نقطة التشعّب:

- بمساواة الداخل بالصفر $2x - 6 = 0$
- بإضافة 6 إلى الطرفين $2x = 6$
- بقسمة الطرفين على 2 $x = 3$

الخطوة 2: نُحدّد الإشارة على جانبي 3: يمين 3 المقدار موجب فنكتبه كما هو، ويسارها سالب فنضربه في -1.

الخطوة 3: نكتب القاعدة على صورة اقتران متشعّب:

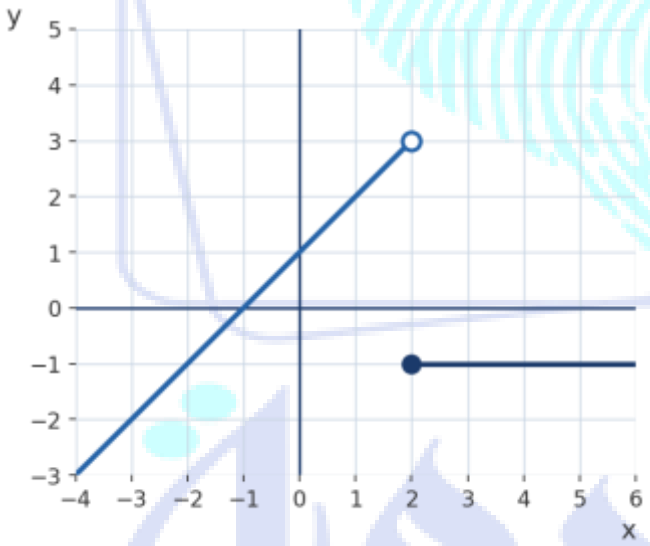
$$f(x)=\begin{cases}-(2x-6)\,, & x<3\\ 2x-6\,, & x\geq 3\end{cases}$$

وبالتبسيط:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+6\,, & x<3\\ 2x-6\,, & x\geq 3\end{cases}$$

مثال (2): كتابة قاعدة اقتران متشعّب من تمثيله البياني

نقرأ كلّ جزءٍ على حدة من الرسم المجاور:



- **الجزء الأيسر: خطّي مقطعه 1 وميله 1؛ قاعدته x + 1، وينتهي بدائرة غير مظلّلة عند (2, 3) ← الفترة x < 2.**
- **الجزء الأيمن: ثابت f(x) = -1، يبدأ بدائرة مظلّلة عند (2, -1) ← الفترة x ≥ 2.**

إذن القاعدة:

$$f(x)=\begin{cases}x+1\,, & x<2\\ -1\,, & x\geq 2\end{cases}$$

مثال (3): تمثيل اقتران متشعّب بيانيًا وتحديد مجاله ومداه

مثّل الاقتران الآتي بيانيًا وحدّد مجاله ومداه:

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x<1 \\ -x+4, & x\geq 1 \end{cases}$$

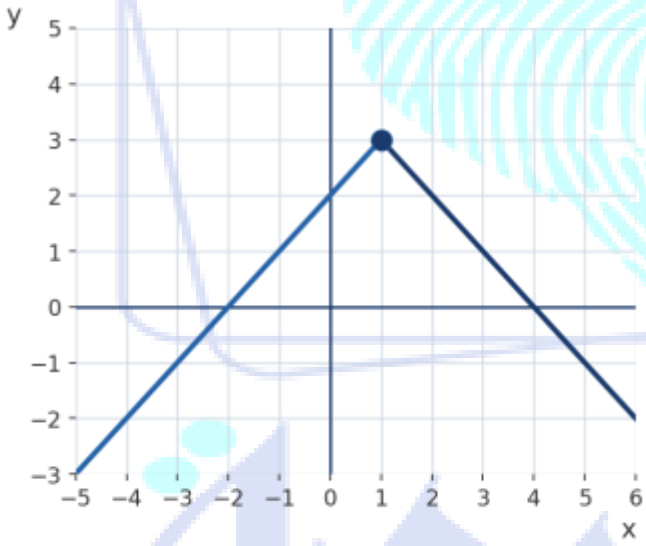
الخطوة 1: نمثّل كلّ قاعدة على فترتها. للقاعدة الأولى x + 2 نحسب الطرفين:

1+2=3

$$-(1)+4=3$$

- **القيمة عند x = 1 (طرف مفتوح ○)**

الخطوة 2: نمثّل القاعدة الثانية -x + 4 ابتداءً من x = 1 بدائرة مظلّلة ● لأنها مشمولة.



المجال: اتحاد الفترتين

$$(-\infty,\ \infty)=\mathbb{R}$$

المدى: أعلى قيمة y = 3 عند x = 1، والمنحنى ينزل على الطرفين، فالمدى:

$$(-\infty,\ 3]$$

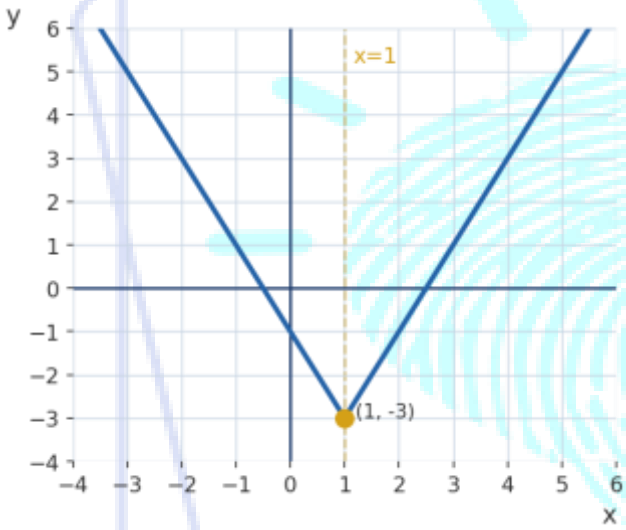
مثال (4): تمثيل اقتران قيمة مطلقة محوّل

مثّل الاقتران الآتي بيانيًا وحدّد مجاله ومداه:

$$f(x) = 2\,|x - 1| - 3$$

نقارن بالصورة العامة a|x - h| + k، فنجد k = -3، h = 1، a = 2.

- **الرأس: (h, k) = (1, -3)، ومحور التماثل x = 1.**
- **بما أن a = 2 > 0 فالفتحة للأعلى (شكل V).**



المجال: جميع الأعداد الحقيقية *R* ، المدى: [-3, ∞) (أي y ≥ -3).

مثال (5): من الحياة — تكلفة بحسب الشريحة

يفرض موقفٌ للسيارات أجرةً قدرها دينارين عن كلّ ساعةٍ ضمن أوّل 3 ساعات، ثم أجرةً ثابتةً قدرها 6 دنانير لمن يبقى أكثر من 3 ساعات. اكتب اقترانًا يربط عدد الساعات *n* بالتكلفة *C*.

نحتاج قاعدتين: ضمن 3 ساعات تكون C = 2n، ولأكثر من 3 ساعات تكون C = 6. إذن:

$$C(n) = \begin{cases} 2n, & 1 \le n \le 3 \\ 6, & n > 3 \end{cases}$$

نأهلك لتبدع ...!

1 أعِد تعريف الاقتران الآتي بدون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |5x - 4|$$

الحل: نُساوي الداخل بالصفر لإيجاد نقطة التشعّب:

- بمساواة الداخل بالصفر: $5x - 4 = 0$
- بإضافة 4 إلى الطرفين: $5x = 4$
- بقسمة الطرفين على 5: $x = \frac{4}{5}$

يمين 5/4 المقدار موجب فنكتبه كما هو، ويساره سالب فنضربه في -1؛ فتكون القاعدة:

$$f(x) = \begin{cases} -(5x - 4), & x < \frac{4}{5} \\ 5x - 4, & x \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

وبالتبسيط:

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 4, & x < \frac{4}{5} \\ 5x - 4, & x \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

2 أعِد تعريف الاقتران الآتي بدون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |3 - 2x| - 6$$

الحل: نُساوي الداخل 3-2X=0 بالصفر:

- بمساواة الداخل بالصفر: $3 - 2x = 0$
- بطرح 3 من الطرفين: $-2x = -3$
- بقسمة الطرفين على -2: $x = \frac{3}{2}$

يسار 2/3 يكون 3 - 2x موجبًا (نكتبه كما هو)، ويمينها يكون سالبًا (نضربه في -1)، ثم نطرح 6 في الحالتين:

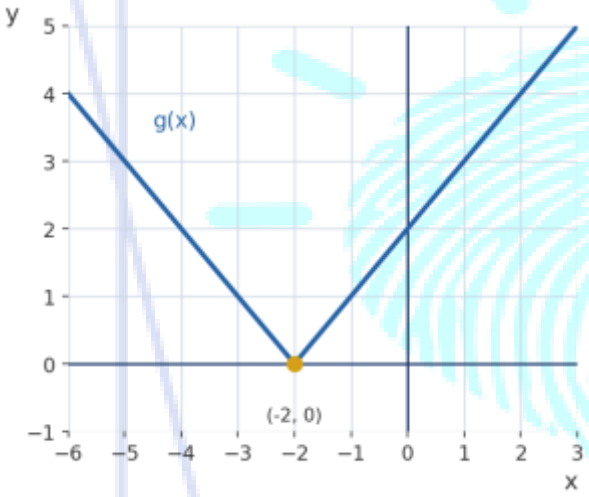
$$f(x) = \begin{cases} (3 - 2x) - 6, & x < \frac{3}{2} \\ -(3 - 2x) - 6, & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

وبالتبسيط:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3\,, & x<\frac{3}{2}\\ 2x-9\,, & x\geq\frac{3}{2}\end{cases}$$

أكتب قاعدة الاقتران المعطى تمثيله البياني

3 اكتب قاعدة الاقتران المُمثّل بيانيًا:

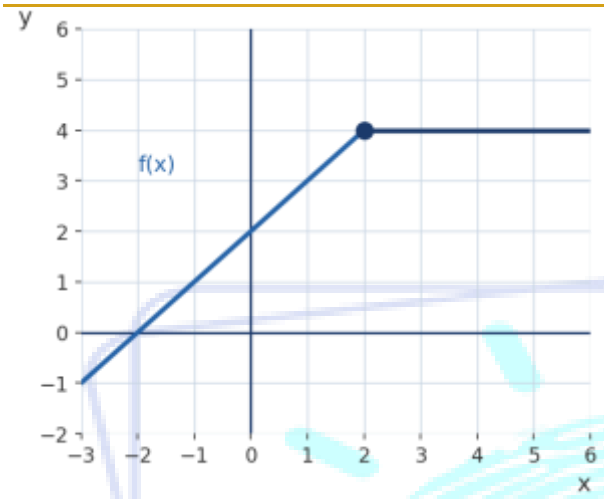


الحل: المنحنى على شكل V، رأسه عند (-2, 0)، وميلاه ±1؛ فهو اقتران قيمة مطلقة g(x) = |x + 2|، ويُكتب متشعِّبًا:

$$g(x)=|x+2|=\begin{cases}-(x+2)\,, & x<-2\\ x+2\,, & x\geq-2\end{cases}$$

4 اكتب قاعدة الاقتران المُمثّل بيانيًا:

نلهمك لتبدع ...!



الحل: الجزء الأيسر خطّي ميله 1 قاعدته $x + 2$ للفترة $x < 2$، والجزء الأيمن ثابت $y = 4$ للفترة $x \geq 2$؛ فالقاعدة:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\,, & x < 2 \\ 4\,, & x \geq 2 \end{cases}$$

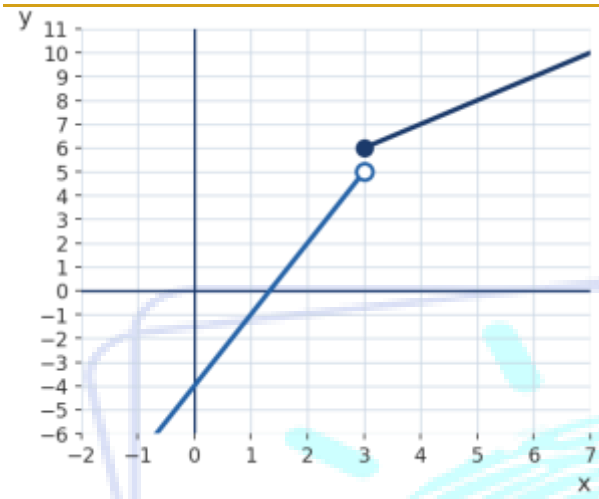
أمثّل كلاً من الاقترانات الآتية بيانيًا، وأحدّد مجاله ومداه

5 مثّل الاقتران الآتي بيانيًا وحدّد مجاله ومداه:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4\,, & x < 3 \\ x + 3\,, & x \geq 3 \end{cases}$$

الحل: نحسب قيمة كلّ قاعدة عند نقطة التشعّب $x = 3$:

- القاعدة الأولى عند $x = 3$ (طرف مفتوح ○) $3(3) - 4 = 5$
- القاعدة الثانية عند $x = 3$ (طرف مغلق ●) $(3) + 3 = 6$



المجال: الفترتان تغطّيان جميع الأعداد، فالمجال

$$\mathbb{R} = (-\infty,\ \infty)$$

المدى هو: $(-\infty, 5) \cup [6, \infty)$

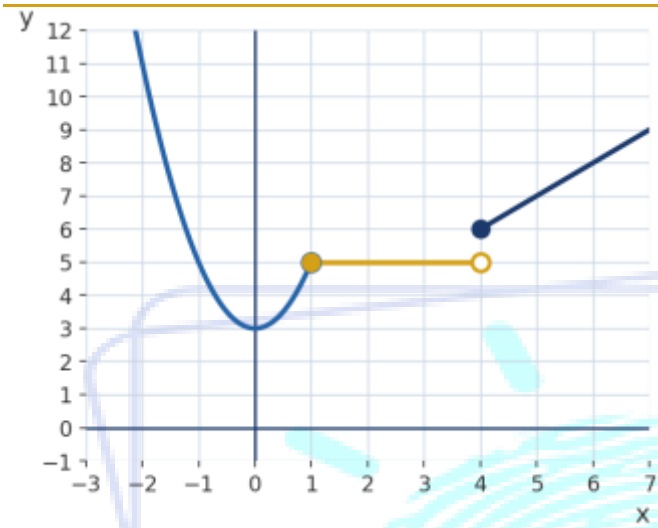
6 مثّل الاقتران الآتي بيانيًا وحدّد مجاله ومداه:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & x < 1 \\ 5, & 1 \le x < 4 \\ x + 2, & x \ge 4 \end{cases}$$

الحل: نحسب الطرفين عند نقطتي التشعّب x = 1 و x = 4:

- القطع المكافئ عند x = 0 (الرأس) $2(0)^2 + 3 = 3$
- نهاية القطع عند x = 1 (طرف مفتوح ○) $2(1)^2 + 3 = 5$
- الجزء الثالث عند x = 4 (طرف مغلق ●) $(4) + 2 = 6$

نلهمك لتبدع ...!



المجال: الفترات الثلاث متّصلة وتغطّي جميع الأعداد:

$$\mathbb{R} = (-\infty,\ \infty)$$

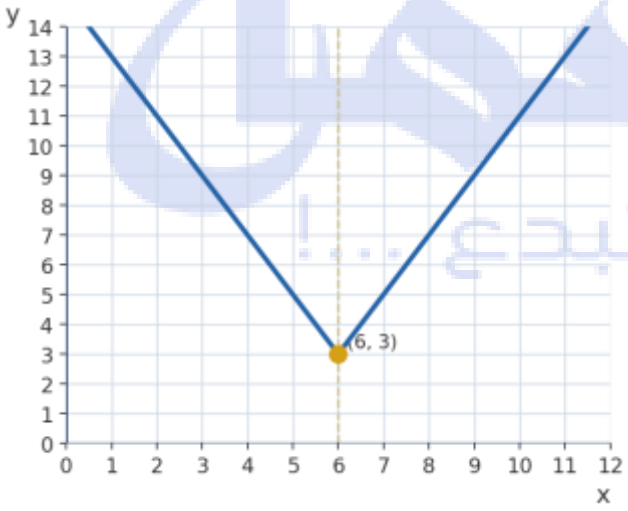
المدى: أصغر قيمة هي رأس القطع y = 3 وما فوقها:

$$[3,\ \infty)$$

7 مثّل الاقتران الآتي بيانيًا وحدّد مجاله ومداه:

$$f(x) = 2\,|x - 6| + 3$$

الحل: بالمقارنة مع a|x - h| + k نجد a = 2، الرأس (6, 3)، والفتحة للأعلى لأن a > 0.



المجال: R ، المدى: $[3, \infty)$ (لأن أدنى قيمة هي $k = 3$).

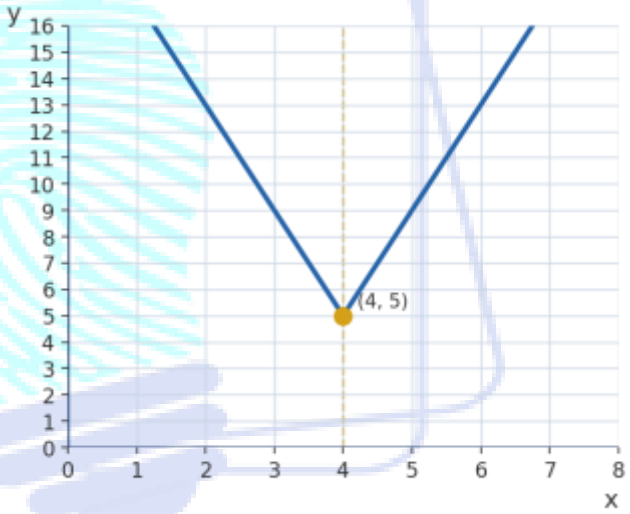
8 مثّل الاقتران الآتي بيانيًا وحدّد مجاله ومداه:

$$f(x) = |4x - 16| + 5$$

الحل: نُخرج العامل 4 من داخل القيمة المطلقة لنردّه للصورة العامة:

$$f(x) = 4|x - 4| + 5$$

فيكون $a = 4$، الرأس $(4, 5)$، والفتحة للأعلى.



المجال: R ، المدى: $[5, \infty)$.

مسألة حياتية

9 كهرباء:

تزوّد شركة الكهرباء القطاع التجاري بالطاقة مقابل رسمٍ ثابتٍ قدره 1.20 دينار شهريًا، يُضاف إليها 0.121 دينار لكلّ كيلوواط·ساعة لأوّل 2000 كيلوواط·ساعة، و0.176 دينار لكلّ كيلوواط·ساعة للكمية الزائدة على 2000. اكتب اقتران الفاتورة بدلالة الاستهلاك x.

الحل: للشريحة الأولى (حتى 2000): الرسم الثابت + سعر الوحدة × الاستهلاك. وللشريحة الثانية: نضيف ثمن أول 2000 كاملةً ثم نحسب الزائد بالسعر الأعلى:

$$f(x) = \begin{cases} 1.20 + 0.121\,x\,, & 0 \le x \le 2000 \\ 1.20 + 0.121(2000) + 0.176(x - 2000)\,, & x > 2000 \end{cases}$$

وبالتبسيط:

$$f(x)=\begin{cases}0.121\,x+1.20\,, & 0\le x\le 2000\\ 0.176\,x-108.80\,, & x>2000\end{cases}$$

تحقّق: لأكثر من 2000، الثابت الجديد = 1.20 + 2000×0.121 − 2000×0.176 = −108.80، وهو ما يظهر في القاعدة المبسّطة.

✦ انتهى حلّ الدرس الأول — بالتوفيق ✦